進出數學課綱開展研究議題

林福來

國立臺灣師範大學 名譽教授

20190906-07數學教育領域,SIG工作坊@墾丁福華飯店

課綱如何開展研究議題：

分析、批判、詮釋、溝通、

實踐、擬議、下一波

閱讀<回歸學科本質,救108課綱>

(張國恩,2109)

思考數學教育研究議題

議題一 關於核心素養：

108課綱核心素養架構有三面九項

(1)每一項核心素養如何養成？
(策略、 方法、實作)

(參閱 張文.四.)

議題一 關於核心素養：

(2)學習數學能夠對每一項核心素養的養成都有貢獻嗎？即數學素養在每一項核心素養的定位、權重如何？如何具體評量？

(參閱 張文.一.五)

議題一 關於核心素養：

(3)每一項核心素養與數學科教學目標的主從關係如何建立？

(論述性/實徵性；政策導向？)

議題二 課綱與推動：

(1)數學老師是否應兼顧<藝術涵養與美感素養>(可替換核心素養的任一項) 如何兼顧?(教學檔案?) 兼顧狀況的調查?
(參閱張文(一))

(2)數學領域如何評量學生的美感素養? (可替換為任一項核心素養)？
(參閱張文(五))

議題三 數學學科本質:

(1)數學學科本質是什麼?

(2)強化數學科本質的學習可養成哪些素養?它與核心素養的距離如何?

(3)數學學習如何達成學科本質的素養?

(參閱張文，最後一段的主張)

108課綱

核心素養與數學素養
的「雞、蛋起源論」辯證

「核心」何義? 基本乎! 完美乎！

- 理念與核心素養的連貫
- 教育目標-培養以人為本的終身學習者
- 課程目標-「適性揚才」

  「培養孩子適應生活與面對未來挑戰的知識、能力與態度」

核心素養示意圖的2D觀與3D觀

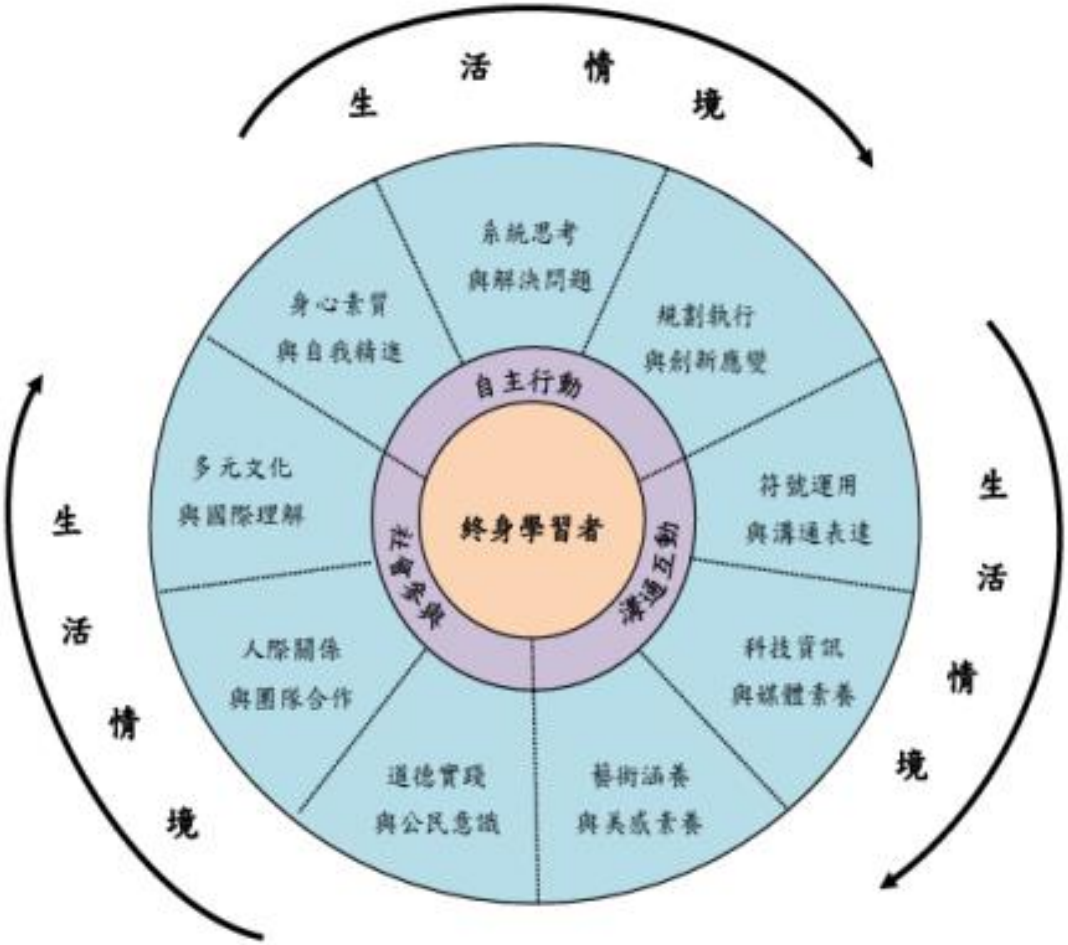


圖 1 核心素養的滾動圓輪意象

3.比較<中國高中數學課程標準>2017年版

一.數學課程研發基本理念

1.學生發展為本，立德樹人，提升素養。

2.優化課程結構，突出主線，精進內容。

3.把握數學本質，啟發思考，改進教學。

4.重視過程評價，聚焦素養，提高質量。

3.比較<中國高中數學課程標準>2017年版

二.數學科核心素養

1.數學抽象

2.邏輯推理

3.數學建模

4.直觀想像

5.數學運算

6.數據分析

三、高中數學課程目標

1.發展「四基」：

基本知識、基本技能、基本思想、基本活動經驗

2.提高「四能」：

發現問題的能力

提出問題的能力

分析問題的能力

解決問題的能力

三、高中數學課程目標

3.培養六大核心素養

4.綜合性目標：

(1) 提高興趣

(2)自信心

(3)養成良好學習習慣(自主學習)

(4)樹立科學精神(質疑、思考、嚴謹求實)

三、高中數學課程目標

(5) 提高實踐能力

(6)提升創新意識

(7)認識數學價值(科學的、應用的、文化的、審美的)

臺灣108課綱數學 VS.中國高中數學

- 理念
- 核心素養
- 五觀
- 六標

- 基本理念
- 學科核心素養
- 目標

➡研究的問題:「友善」的課綱架構及項目內容

四、課綱上位理念/觀點

X 是什麼?

X：課綱主角

數學/學習/義務教育/宗旨

(Math for All)

四、課綱上位理念/觀點

案例1：數學是一種語言vs. 數學是連結/溝通vs. 數學是抽象的

- 背景

臺灣108課綱 VS.美國NCTM VS.中國高中數學

分析：三者關係

批判：辯證在什麼規準/原則下的選擇

詮釋：知識論、教育學、社會文化

溝通：研發者、推廣者、使用者間「形成共識」的研究

實踐：
- 教材設計
- 教學實作　之研究
- 評量設計

擬議：

- 前瞻教育思潮，符應社會發展特性的理念與觀點選擇規準
- 「抽象」知識的學習研究(Ref：T. Dreyfus的AiC)

下一波：

統整以上各項研究為基礎的「專業化」作為，首要思考:以數學的觀點看世界，與世界互動，內涵是什麼?

甲、以數學基本感，覺知世界

基本數學感

- 數感
- 量感
- 形、體與方向感
- 對稱性
- 三一律

等等，因人而異。

量感

例：秤重達人

對稱性

例：體感線對稱

等量公理

例：

兩手掌全疊合、部分疊合

數感

例：長方形數

乙、以二元對立觀點，洞察世界

1. 確定性 VS. 不確定性

2. 有限 VS. 無限

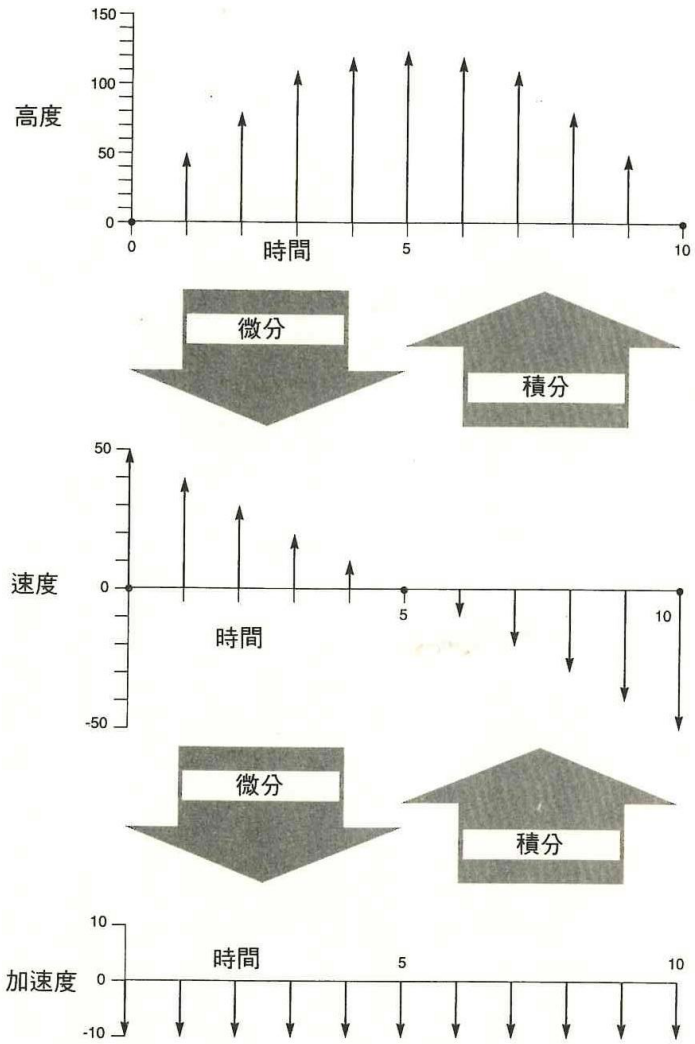
3. 線性 VS. 非線性

確定性 vs. 不確定性

例：貪心賓果

有限 vs. 無限

例：拋體運動



線性 vs. 非線性

- 非線性例
- 手機電池存量圖示
- 成長、週期、……

線性 vs. 非線性

- 線性思維，ax+by
- 數量和(小學)
- 比例(國中)
- 線性組合(高中)……
- 素養表現：社區管理費

乙、以二元對立觀點，洞察世界

4. 靜態 VS. 動態
5. 特殊 VS. 一般
6. 具體 VS. 抽象
7. 歐氏 VS. 非歐

靜態 vs. 動態

幾何概念的動態觀

例：脫形換骨

動態現象的數學模式

移位運動、擺動、共鳴、疊代、

分化、混沌

特殊 vs. 一般

例：打折加稅

具體 vs. 抽象

具體與抽象畫的任意穿越

悠游於　　現實與想像

享受　　發現與創新

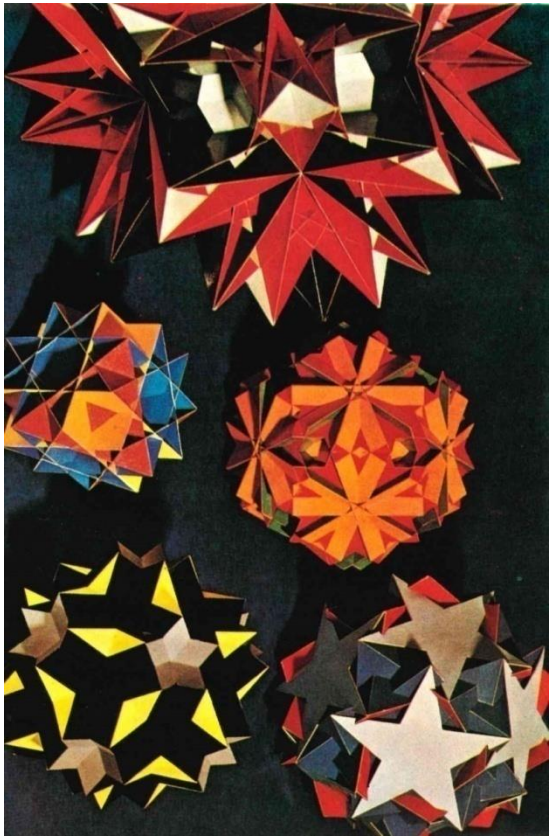
分數小精靈

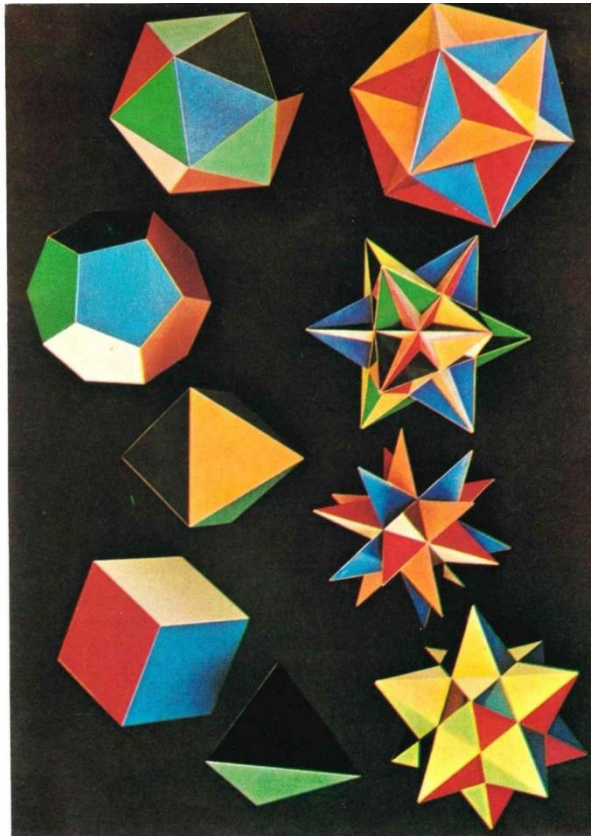
抽象 → 圖像 → 操作

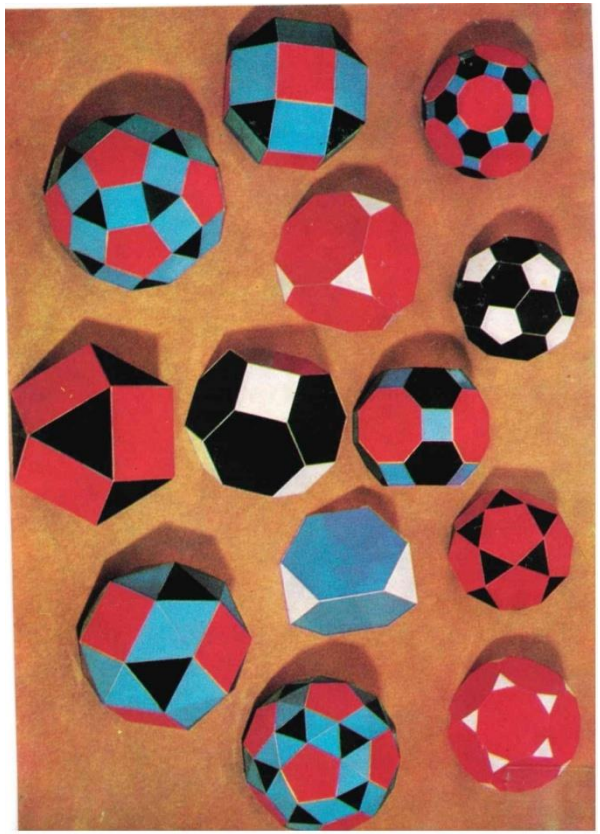
符號　　動作

例：三張明信片

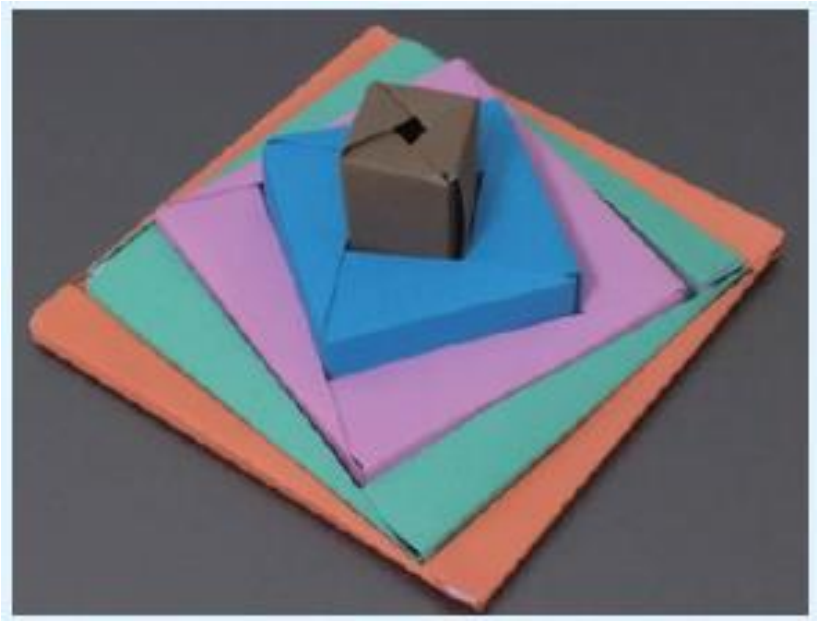
英國倫敦自然科學博物館







<藝數摺學> 李政憲



丙、以結構性/系統性了解世界

數學的結構性

1. 分類-發展觀

   {物件、關係、性質}

2. Trans-relational

   {概念、實例、命題}

五、課程目標設定

案例2

分析：是什麼?

批判：總綱與領綱的銜接性、定位、…

詮釋：在學術上，教學實作上的意義

溝通：研發者、推廣者、使用者間，課綱與教科書之間

實踐：(1)研究如何對目標形成共識

(2)如何落實的實徵性研究

六、課程教材單元的安置

基本 VS. 前瞻

教學慣性

七、學習理論

可操作性的學習模式

八、教學進路

- 尊重我國社會文化下的教學特性
- 推薦實徵驗證有效的教學進路

九、評量

Z 課綱行政

- 課綱週期
- 研發委員的「專業」
- 民主程序

附錄：<五觀六標>的教學啟示

十二年國教數學課程數學領綱提出五項基本理念，前三項是：

一、數學是一種語言。

二、數學是一種實用的規律科學。

三、數學是一種人文素養。

這三項”數學是...”都是針對什麼是數學的不同詮釋。領綱委員從各種何謂數學的詮釋中共識性所選擇的三種觀點。

基本理念的第四項：

四、數學應提供每位學生有感的學習機會。

這是課程所主張的關於數學學習的觀點。此觀點重點在學生的學習機會，強調學生的學習權，並且相信提供給”每位”學生有感學習的教材與教學是必須的且是可行的。

第五項基本理念：

五、數學教學應培養學生正確使用工具的素養。

這是科技工具融入數學教學的主張。呼應數位化社會時代的教學觀點。使用這套課程的學生，他們身處的生活工作環境景象是”人跟科技工具協調共事，互補合作，以完成任務”，科技融入數學教學，先進國家八零年代起就已陸續推動，我國礙於’考試領導教學’，過去一再拖延，這次領綱算是跨出早該有的一步。

數學領綱的五項基本理念揭示了三種’數學是什麼？’的觀點，提出課程基本的學習觀點，以及主張科技應融入教學的觀點。這五項基本理念就統稱為本數學領綱的<五觀>。

<五觀>中的每一項，都可以撰寫專書充分詮釋，尤其是針對教科書教材編輯，課室教學實作，與評量設計進行引申，以期意圖的領綱跟現場的教學，學生的學習之間落差能夠極小化。

本文將粗略概論<五觀>對數學教學的重點啟示。拋磚引玉，不求周延。

<觀點一> 數學是一種語言

使用數學語言可以精確表達想法，它是理性溝通的工具。從語言觀點，討論數學教學，有兩個重要的向度，一是數學的閱讀理解，另一是數學的表達。

1.數學的閱讀理解

各類數學文本，像教科書、數學科普讀物、數學繪本、參考書、學習工作單、考題等等，都是可能的閱讀對象。

分析數學文本使用的記載工具、記載的內容以及敘述手法，可以掌握它的特殊性。

一般數學文本會使用符號、圖與文當工具來記載數學內容，包括數學物件(概念及其衍生物)、關係與性質。敘述的手法往往藉助例子，例子通常融入于情境中，甚至運用表徵輔助。敘述的行文推進又可能動用不同的推理方式(歸納、演繹、溯因、隱喻)。如何引導學生閱讀這種特性的數學文本呢?

央團國語文領域的前召集人鄭圓玲教授曾很直白的描述文本閱讀理解的三個層次。

L1. 是什麼。

L2. 為什麼。

L3. 換你說。

數學的閱讀理解也可以藉用此理解模式加以詮釋，進一步思考對教學的啟示。

L1. 是什麼 階段

要理解數學文本在表達什麼，有兩個步驟：解碼與文意理解。

數學文本中的符號、語詞、圖、表徵的意義，先要確認學生是否了解。學生看到不熟悉的符號，往往忽視它，不動它而偏離其義，下列行為就是：

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$$
$$2a+5b=7ab$$

當學生對符號、語詞、圖、表徵不甚了解時，整個文本就像植入很多密碼，所以閱讀一開始就要先解碼。

解碼之後的文義理解，是這階段的教學重點。例如，學生閱讀數學文字應用題因不了解題意而不會解題，是教師常有的經驗。八零年代澳大利亞有個實徵性調查，檢驗這現象的普遍性。在兩千多筆文字應用題出錯的樣本中，訪談後發現將近一半是出在解碼與文義理解。另外一個教學實驗，在小學兩個同年級的班，由語文教師拿著課本，以解碼後再文義理解的方式教學，跟另一班由數學老師以常見的數學講解方式教學，比較發現接受語文式教學的學生表現較佳。

這些案例提醒數學教學時，一定得一再針對數學符號之類的密碼，進行解密，再文義理解。如果教師習慣上口述數學問題，配合黑板上的重點板書進行教學，很有可能就是積累出落後學生的元凶。

L2. 為什麼 階段

數學文本行文過程，往往融入各種不同的推理方式，歸納與演繹最常見，常常也用隱喻表達。

歸納的過程，根據有限的幾個例子推論一般的規律，或根據動態的案例進行數學性質的臆測，都是有感的數學學習過程。歸納的結果，在數學上僅是有感的猜想，不是數學的事實。一般小學開始就可以跟學生溝通。例如，一位小三的學生，有一天跟老師說：”我發現奇數加奇數都是偶數。” 老師鼓勵他上黑板寫下他的猜想，並說明給同學聽。他舉了三個例子做說明。班上有同學挑戰說：” 舉再多的例子，也不能確定啊!” 這位 ” 再發現 ” 規律的學生下台後，老師認同批判的同學的說法，並詢問有沒有其他同學可以進一步論說。這時有位女同學上台了。她口說：” 奇數都會兩兩配對後多一個 ” 然後手指黑板上的7 和9，並畫◯配對。再說：”把兩個奇數多的一個再配成一對，所以兩個奇數的和數，都可以兩兩配對，是偶數”。全班跟老師都鼓掌讚賞。

這段敘述給了幾點教學啟示：

(1)歸納推理在數學的功能，師生已有共識。給這位老師按個讚。

(2)小三學生的數學論證特性是:用口語敘述表達一般性，再配合特例與表徵進行推理。

(3)小三學生已經具備數學推理論證的溝通能力。

換句話說，小學數學課室是可以進行數學論證學習活動的。這觀點是國際數學教育學會(ICME)的數學論證(proof and proving)專書上，開宗明義的主張。

L3. 換你說階段

換你說階段主要鼓勵針對文本的反思與批判。

反思與批判思考都是培養素養的重要歷程。從問題解決的觀點看數學學習，它有三步驟：切入、攻擊與反思。

反思解題過程中關鍵性的想法，思考這想法還可以應用到別的哪些問題。這次解題經驗跟過去經驗的銜接統整等等，都是反思的對象。透過反思可以逐漸把數學系統化、結構化，而不是零碎的許多公式。早期的數學能力評量就有一項叫”數學記憶力 ”，指在解完數學題，或學習一段時間後，學生在腦中留下來的是什麼？例如學生學了雞兔問題後，記得的是’雞與兔’的情境，還是背後的問題結構，素養發展大不同。另起一段反思與批判思考也是創新的源頭。反思讓自己逐漸有獨立的主張，批判思考養成提出自己的另類想法的習性，都是數學素養教學的精華。

數學閱讀理解的研究，楊凱琳教授是長期有系統性投入的專家。期望她來跟現場教師分享。

2.數學的表達

數學教材的內容包括物件、關係與性質。

表達這些內容物的手法多數藉助情境例子，這迴異於數學是形式化系統的課程觀下，所使用的手法：先定義➡後例子➡再應用的序列。

從數學是一種語言的觀點，教學的重點在表達數學物件的自然語言發展，以及表達數學關係與性質的邏輯語言的使用習性。以下舉數學奠基進教室的敘事為例，進行教學的引申。

從數學是一種語言的觀點，教學的重點在表達數學物件的自然語言發展，以及表達數學關係與性質的邏輯語言的使用習性。以下舉數學奠基進教室的敘事為例，進行教學的引申。

學生玩「長方形數」的遊戲後，老師請學生表達，當對手給出的棋子數目，可或不可以排出長方形時，根據玩的當下的情緒與想法，分別為這兩類的數命名。學生很自然地說出好數vs.壞數，廢數、沮喪數等情意性語詞。有組學生說不能排成長方形的棋子個數為”點線數”，另一組學生受到以現象命名的啟發，稱呼可以排成長方形的數為”正長數”，還進一步主動說明長是長方型的長，不是正常的常。學生根據操作所得的現象，以其屬性命名數的分類。老師在此基礎上，將學生的命名過渡到正式的數學名稱，質數和合數。而1自外於此二分系統，為什麼?對學生而言很自然，他們說因為它只能排一個點，不像其他質數的棋子都可連成一線。這是一段奠基進教室的敘事，表達數學物件命名的自然發展，重視學生的有感參與及過渡。

關於數學關係與性質的表達，再分別舉兩段敘事分享。

小三學生學習三角形的分類，三角形七十二變模組融入教學的敘事。老師以’三角形家族’當隱喻，引導學生將4種不同長短(顏色)扣條所造的18個三角形，分成不同的家族。多數學生都是分出三個家族，三扣條都一樣，兩扣條一樣，跟三扣條都不一樣。但有位同學剛開始只歸成一家族，寫上都是三角形。當他觀察到別組同學都不只分成一種，就再分，分成兩個家族，即三邊都一樣的，跟非三邊都一樣的。還有一組兩位同學分成五個家族，他們將兩邊相同的家族再細分成三個家族，分別是尖尖的(等腰的底邊很短)、扁扁的(等腰的底邊較長)、寬寬的(等腰的底邊接近兩腰)。這敘事的教學啟示是：

(1)學生有豐富合邏輯的另類思考。

(2)小三學生已發展有實物參照的二階思維能力。

(3)教師預設的教學目標(三個家族)，需要跟著學生的行為調整。

另一段敘事是條件命題的表徵與類化的學習：數字拉密。小五學生，老師要學生將1到30的數，先二分，再進一步分類，然後用教具(毛根)圍起來。學生主動用毛根造出偶數，跟4的倍數的文氏圖。根據自己造的文字圖，念出’如果4的倍數’一定是’2的倍數’。

這句型再進一步類化到其他數的倍數關係所形成的條件命題。

數學的性質，都是條件命題，學生自己可以進行臆測，主動形成自己的猜想，學會以條件命題表達，可以深化數學的思維。數學教學需要從小學開始，就充分提供這樣的學習機會。 (待續)

課綱主張的第二種數學觀點為：

〈觀2〉：數學是一種實用的規律科學。

這觀點從知識學習的過程與結果來詮釋，可以解讀成兩種數學的次觀點：

〈2.1〉數學是實用的規律。(結果)

〈2.2〉數學是探究規律的科學。(過程)

這兩種次觀點在課綱中很明確地轉化成所宣示的六項目標中的三項；即

目標二：〈探究與溝通〉

培養好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。

〈探究與溝通〉課程目標很具體的鋪陳了〈2.2數學是探究規律的科學〉的過程，列舉數學規律探究過程中的各項子能力；好奇心永遠是探究的原動力。當然，其中的溝通和數學表述能力，應該也是前篇詮釋的〈數學是一種語言〉所關注的課程目標。此目標可摘要簡記為〈探究與溝通〉。

目標四：〈問題解決〉

培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。

課程目標〈問題解決〉，可依問題的性質不同，而承載〈2.1〉或〈2.2〉，應用規律的問題或是探究規律的問題都是教材。

目標五：〈應用與學習工具〉

培養日常生活應用與學習其他領域/科目所需的數學知識。

課程目標〈應用與學習工具〉強調數學的功能性，既可實用於日常生活，又扮演學習其他領域之學習工具的角色。它承載〈2.1數學是實用的規律〉的成份大，但從數學規律探究的過程所發展的數學思維模式在其他領域的學習遷移，也扮演工具性的角色。

一種數學觀點轉化連結六項課程目標中的三項，可見此觀點在教學現場應被重視的程度有多重。以下就從次觀點〈2.1〉與〈2.2〉分別來詮釋對數學教學的啓示。

〈2.1〉數學是實用的規律。

〈2.1〉次觀點有兩個面向的問題都對教學有重要啓示。一是能夠實用的學習材料的情境設計問題，另一是學習規律的路徑問題。

◆可體現的情境

數學材料的情境設計，國際上引領風騷凡四十年的荷蘭「現實數學教育」學派 (RME)，主張現實情境同時是發展數學概念的土壤，亦是數學應用的領域。現實情境的主張在落實時的侷限性，近十年來逐漸被挑戰，甚至在荷蘭本土亦然。RME主義所研發的教學原則以及評量架構(例如PISA素養評比)，仍然是當下國際數學教育社群的發展趨勢。但「現實情境」的訴求則已調整成「可體現的(realized)情境」。可體現情境的設計當然也可涵蓋現實情境，但不必然。例如「長方形數」的學習活動中，用類似圍棋子之類「圓形」物件，擺出形狀，會有{點,線,長方形}三類，這三類跟自然數分類的{1, 質數 , 合數 }，完美對應。學生用具體物操作擺形狀，自然是可體現的情境。再如，學生觀察圖片上城堡的屋頂及牆面，具象的描述形狀，引導柱體、錐體的辨識，從具象的圖片，學生可以形似的複製屋頂，也是可體現的情境。一般而言，布魯那三種學習表徵中，動作表徵與圖象表徵的整合設計，都可發展出「可體現的情境」。對於不同學習階段的學生，尤其是高中以上，學生可體現的具體性或具象性的設計原則，也是必要的。

◆規律的學習路徑

從上世紀的八0年代起，國際數學教育社群的數學教學共識最普遍的是：Teaching for understanding，也就是中華古籍《禮記》的〈學記篇〉所謂的〈教者，喻也〉。教學實驗研究，通常都以學生的理解(Understanding)情形做為教學的成效指標。此一共識的迷思可能壓抑了對某些學生是必要的規律的一種學習路程，即：先用規律，後理解；而把教學的價值全擺放在：先理解，再應用規律。〈教者，喻也〉，只強調教學目標一定是學生能理解，而不侷限學習路徑是〈先用後理解〉還是〈先理解再用〉。亦即學界用來表達學習路徑的Rule-Example或Example-Rule，先用Rule-Example，也就是先學規律，不一定知其所以然，就學如何應用在標準簡易的問題上。此路徑之所以被詬病，問題出在沒有在適當的時機促進學生理解規律的所以然。這樣各種規律的累積，就造成所謂記憶性學習。

<2.2> 數學是探究規律的科學

課綱意圖的目標二:<探究與溝通> 就是次觀點<2.2>的詮釋。目標二的落實符合”學生為中心”、”主動思考”、”活的數學”的教學，目標二從培養好奇心啟動，如果我們希望每一種學習活動，學生都能懷著”好奇心”參與，那麼教學應該怎麼切入？培養好奇心的目的是為了能熱烈參與學習。

數學奠基活動主要針對概念學習之前設計滲透數學思維於操作性活動與遊戲中，以培養學生具象的概念”基”。推廣的結果，學生的參與度、認知跟情意面相，都極熱烈。

熱烈的參與度凸顯學習的正向態度與興趣。換句話說，在國中小階段，操作性活動搭配遊戲的教學進路，已證實可有效達成學生熱烈參與。

觀點<2.2>對教學的啟示，再舉其要，有下列三點:

1.問題意識

教學要在有感的”問題意識”之氛圍中進行，學習者心中要有目標的學。

2.數學探究

數學探究進路主要是數學臆測或數學建模，兩者可獨立亦可整合。

3.規律的再發現

學生經驗規律的再發現，回饋彭湃的內在喜悅。

舉教學實力引申說明:

[足球問題]的教學敘事是在一個國二普通班兩個下午六節課的探究活動。教師準備一張足球圖片，請學生自己提問問題。

A.足球有多少頂點？ 多少正五邊形？ 多少正六邊形？

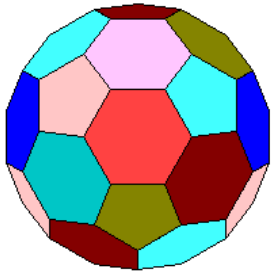
B.足球為什麼要製作成這樣？

一開始學生花了半小時觀察圖片，小組整理自己提問的問題。

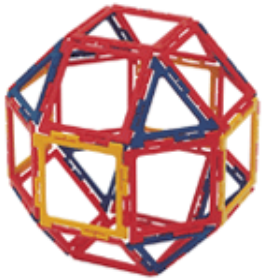
學生自己提問問題，往下的探究自然是在有感(自己提問)的”問題意識”氛圍中進行，學習目標確定。

解問題A時，學生因只看足球圖片，數數需空間推理，因而出現不同答案，經過討論，學生觀察到足球上的對稱規律，即每一頂點鄰近都有一正五邊形及兩個正六邊形。

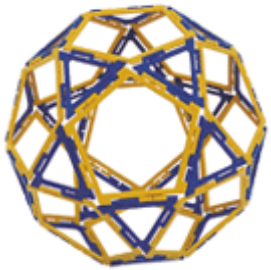
洞察足球上每一頂點的對稱性成為解問題B的預備知識。學生開始利用教具(百利智慧片)製造{類足球}，即每一頂點旁都是正多邊形的對稱立體。學生接著為每一個類足球，以頂點鄰近多邊形命名並表徵，例如足球(5,6,6)、正立方體(4,4,4)、正四面體(3,3,3)，其他如(3,4,4,4)、(5,3,5,3)、(3,4,3,4)。



(5,6,6)



(3,4,4,4)



(5,3,5,3)

學生每製作一個類足球，就放地上踢踢看。體察”容不容易滾動”如何用數學表示，即類足球滾動性的數學建模問題。

學生發現類足球每一頂點鄰近多邊形頂點的角和，跟360°的差值(角虧)，是滾動性的主變因。角虧愈大愈不容易滾動。換句話說，學生成功地建立了以”角虧”(數學建模)來表現類足球的滾動性。足球的角虧12°是所製造(有限)類足球中最小的。這已逼近問題B的數學解了。

學生將所有製作的類足球列表，分別標示角虧及頂點個數，突然有位同學提問: 每一個類足球的總角虧和是多少？都是720°。啊哈！引來一陣歡呼！笛卡耳公式的再發現！學生用有限例歸納，得出笛卡耳公式的臆測。

足球問題的探究充分體現課綱目標二<探究與溝通>的各項能力。

不過足球問題的探究，不是教學的日常。一般上課題材，改編成探究規律的任務，可從以下案例中學習怎麼設計。

案例：觀察下表，你有何發現？寫出一般項。

表		
1	3	3
2	4	8
3	5	15
4	6	24
5	7	35
⋮	⋮	⋮

上表是$(n+1)^2-1=n(n+2)$的有限項。換句話說，以基本的$(n+1)^2=n^2+2n+1$的變形，製作的有限項表格，讓學生觀察規律，是具有挑戰性的探究活動，尤其是當1用2取代，甚至用更大的數取代，學生要找到平方數的規律，有好長的路要試探。

此數學探究規律問題設計的步驟如下：

道而弗牽：造表，引導觀察

開而弗達：探究規律

強而弗抑：奠基(如$(n+1)^2$的規律探究)，再改變變因 (如$(n+2)^2$)

開而弗達：再探究 (新提問)

從很多數學規律切入，設計探究活動，活化學習，貼近數學的發展史，是這類活動的意義。歷史上像恆等式"$n^2=(n+a)(n-a)+a^2$"，即是早期七世紀一位印度數學家Brahmagupta的發現吔!!

Thank You